Das Newton-Verfahren

Mit Hilfe des Newton-Verfahrens lassen sich Nullstellen von beliebigen, mindestens einmal differenzierbaren Funktionen näherungsweise berechnen.

Das Verfahren funktioniert wie folgt:

1. Schätze (zum Beispiel anhand des Graphen) die Nullstelle der mindestens einmal differenzierbaren Funktion f so genau wie möglich ab (x_0).
2. Berechne $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für $n = 0$.
3. Wiederhole 2. mit $n = 1, 2, \ldots$ so lange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist (und x_n offensichtlich gegen einen bestimmten Wert konvergiert).

Herleitung

Wie man in der untenstehenden Grafik erkennen kann, liegt x_1 näher an der Nullstelle der Funktion f als x_0. Wir suchen x_1, also den Schnittpunkt der Tangente mit der X-Achse (1.1). Da aber der Ordinatenabschnitt b nicht bekannt ist, ziehen wir Gleichung (1.2) zur Hilfe heran, die den Schnittpunkt der Tangente mit dem Graph von f an der Stelle x_0 beschreibt:

$$0 = f'(x_0) \cdot x_1 + b \tag{1.1}$$
$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b \tag{1.2}$$

Lösen wir nun (1.2) nach b auf und setzen den Term in (1.1) ein, so erhalten wir:

$$0 = f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Wenn wir die Gleichung durch $f'(x_0)$ teilen und nach x_1 auflösen erhalten wir

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{2.1}$$

oder die – da dieser Schritt beliebig oft wiederholt werden kann – auch oft in allgemeinerer Form notierte Gleichung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.2}$$

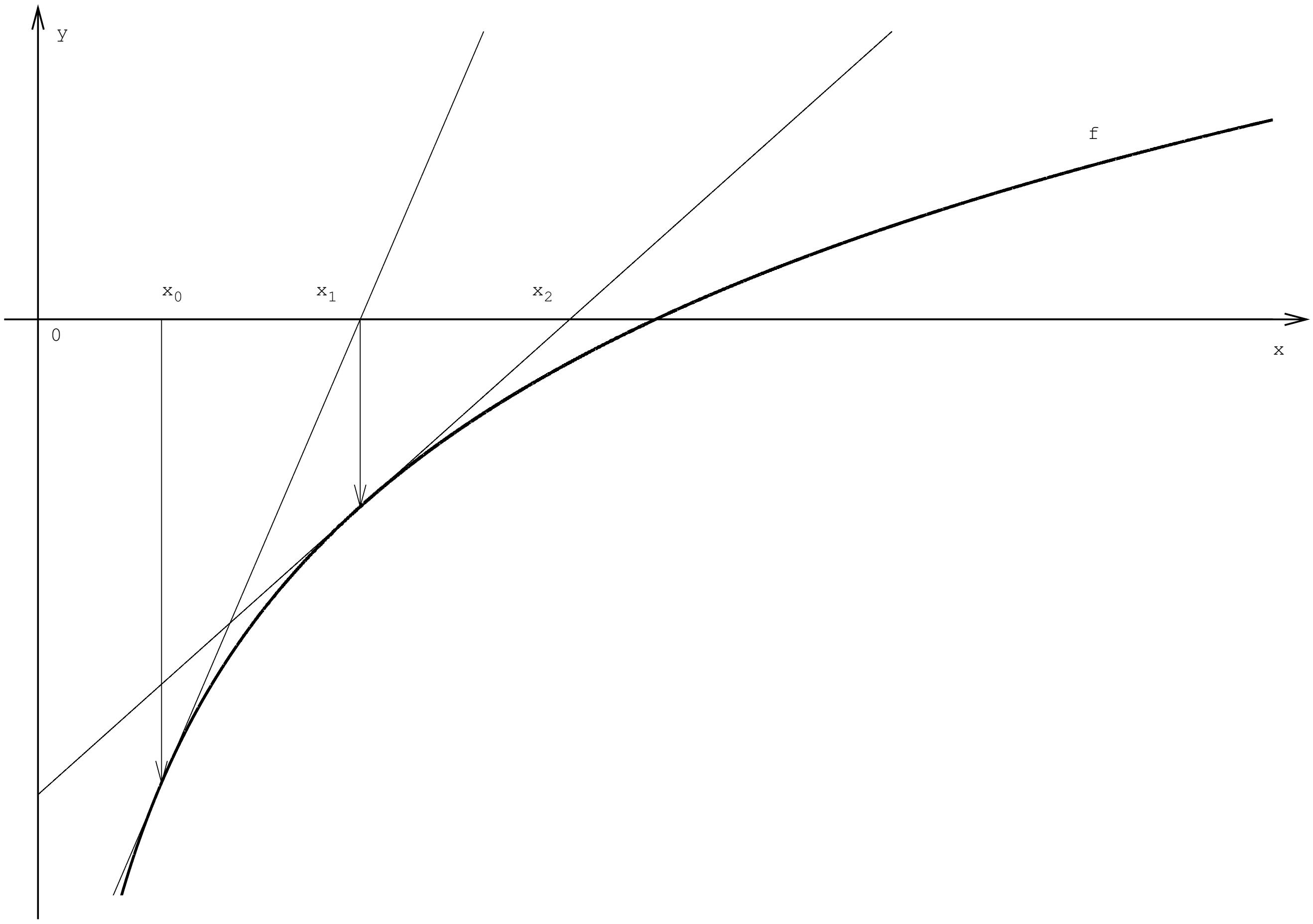

Abb. 1: Das Newton-Verfahren grafisch dargestellt

Die Wahl von $\mathbf{x_0}$

Die Wahl von x_0 ist meist relativ leicht. Bei Funktionen wie der Logarithmusfunktion oder Exponentialfunktionen findet das Newton-Verfahren selbst bei einem weit entfernten x_0 noch relativ schnell die Nullstelle. Aber gerade wenn Funktionen mehrere Nullstellen haben, die möglicherweise auch noch nah beieinander liegen, ist die richtige Wahl von x_0 wichtig.

Pech hat man, wenn man ein x_0 wählt, an dessen Stelle der Graph gerade ein relatives Mini- oder Maximum hat. Denn dann ist die Steigung der Tangenten an der Stelle 0, und durch 0 kann man nicht teilen.

Auch wenn man nah genug in die Nähe eines solchen relativen Extrems kommt kann das Verfahren fehlschlagen; da die Steigung dort $f'(x_0) \approx 0$ ist, befindet sich die Nullstelle der Tangente so weit weg von der eigentlich gesuchten Nullstelle, dass das Verfahren wenig Sinn macht.

Wenn man durch Zufall auf einen solchen Wert treffen sollte, probiert man es einfach mit einem anderen Wert noch einmal.

Konvergenz, Divergenz und Oszillation

In der Regel konvergiert (passt sich an) die Reihe x_n zu einen bestimmten Wert, einer Nullstelle. Besitzt die Funktion allerdings gar keine Nullstelle, so divergiert die Reihe meist (s. Tabelle). In seltenen Fällen passiert es sogar, dass die Werte der Reihe sich in periodisch wiederholen, also oszillieren (s. Tabelle).

Lösen von Gleichungen

Mit Hilfe des Newton-Verfahrens kann man auch Gleichungen lösen, wie beispielsweise den Schnittpunkt zweier differenzierbarer Funktionen f und g. Dazu muss man die Gleichung $f(x) = g(x)$ so umstellen, dass eine Nullstellenberechnung daraus wird, $f(x) - g(x) = 0$, und dann das Newton-Verfahren anwenden.

Als Beispiel sei die Lösung der Gleichung $\ln x = -x$ gesucht. Als Startwert x_0 nehmen wir 1:

$$\begin{aligned} 0 &= \ln x + x & x_1 &= x_0 - \frac{\ln x_0 + x_0}{\frac{1}{x_0} + 1} = 0{,}5 \\ x_2 &= 0{,}564382393 & x_3 &= 0{,}567138987 \\ x_4 &= 0{,}56714329 & x_5 &= 0{,}56714329 \end{aligned}$$

Wie man sieht, konvergiert die Reihe gegen 0,56714329. Beim Einsetzen von x_5 in die ursprüngliche Gleichung erhält man: $\ln(0{,}56714329) = -0{,}56714329$.

Taschenrechner

Der Taschenrechner, mit dem wir arbeiten, ist in der Lage, das Ausrechnen der Werte nach dem Newton-Verfahren sehr zu beschleunigen. Dazu macht man sich das Speichern von Werten unter Variablennamen zu Nutze.

Es sei $f(x) = x^2 - 3$, x_0 sei als 3 gewählt worden. Um das Newton-Verfahren anzuwenden, gibt man folgendes in den Taschenrechner ein:

$$3\ \boxed{\text{STO}}\ \mathtt{X}$$

$$\mathtt{X} - \underbrace{(\mathtt{X}^2 - 3) \div (2\mathtt{X})}_{f(x_n)/f'(x_n)}\ \boxed{\text{STO}}\ \mathtt{X}$$

Hierzu drei Anmerkungen: $\boxed{\text{STO}}$ ist die Zweitbelegung von $\boxed{\text{RCL}}$, also mit $\boxed{\text{SHIFT}}$ erreichbar; nach $\boxed{\text{STO}}$ folgt direkt die Taste des Buchstabens, in dem der Wert gespeichert werden soll. Um den Buchstaben X in einem Ausdruck zu erzeugen muss $\boxed{\text{ALPHA}}$ verwendet werden.

Nach dem Eingeben der zweiten Zeile erscheint der Wert von x_1 auf dem Display und wird gleichzeitig wieder in der Variable X des Taschenrechners gespeichert. Wird jetzt noch einmal auf $\boxed{=}$ gedrück, wird der Wert von x_2 angezeigt, der wiederum in X gespeichert wird, und so weiter.

Funktion/Wert	$x^3 - x^2 + 2$	$-x^2 - 1$	$\sin(x)$
x_0	1	2	3
x_1	0	2.750	3.14254654307427780529
x_2	1	3.943	3.14159265330047681546
x_3	0	5.787	3.14159265358979323846
x_4	1	8.595	3.14159265358979323846
x_5	0	12.835	3.14159265358979323846
x_6	1	19.213	3.14159265358979323846
x_7	0	28.794	3.14159265358979323846
x_8	1	43.174	3.14159265358979323846
	oszilliert	**divergiert**	**konvergiert** (nach π)

JULIUS PLENZ